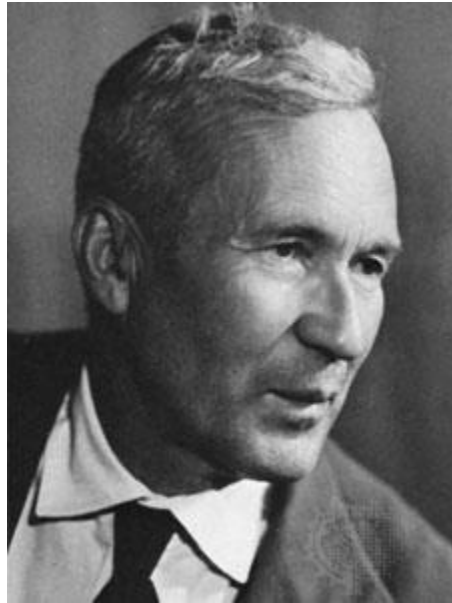


流体江湖风云录 – 东邪柯尔莫哥洛夫

“桃花影落飞神剑，碧海潮生按玉箫。”东邪黄药师，天下五绝之一，武功超凡脱俗，已臻化境。他聪明绝顶，博览群书，兼学百家，志趣深远。上通天文，下知地理，五行八卦，奇门遁甲，琴棋书画，医卜命相，术数纵横，乃至农田水利，经济兵略等亦无一不晓，无一不精。他薄汤武，非周孔，漠视礼法却珍视大节，恃才傲物却难掩温情。他独居东海孤岛，不问世事，快意潇洒，却在南宋江山岌岌可危之际，义助襄阳，主持战局。此等人物，虽有沽名之嫌，迁怒之过，仍不得不为我辈所神往也。

而在流体力学发展的长河中，也曾有过这样一位全才大师，以神来之笔在现代湍流发展史上写下了浓墨重彩的一章。此人之才情，比之黄老邪有过之而无不及。他便是苏联数学大师安德雷·柯尔莫哥洛夫(Andrey Kolmogorov)，柯老邪是也。



安德雷·柯尔莫哥洛夫 (1903-1987)

老邪二字，或有调侃，绝无不敬。

柯老邪在数学上的造诣，当世只有亨利·庞加莱(Jules Henri Poincaré)，大卫·希尔伯特(David Hilbert)，约翰·冯·诺依曼(John von Neuman)等寥寥数人可与比肩。而其研究之精深，领域之广博，构思之绝妙，或无一人可出其右。他理论与应用双修，学识纷繁庞杂，遍及概率论，实分析，泛函分析，拓扑学，构造性逻辑学，算法信息论，湍流，经典力学，动力系统，遗传学，气象学，弹道学，金属结晶学等领域，凡有涉足，必有所创，其中不乏众多奠基性的成果。更兼他文理皆通，对历史，哲学，语言学，俄国诗歌韵律学等诸多学科都

有着系统的研究和独特的见解。作为战斗民族的一员，他甚至在体魄和运动上也天赋过人——曾完成 40 公里着短裤越野滑雪的壮举。



柯尔莫哥洛夫远足于高加索山

柯老邪平生所学，实在浩如烟海，比之黄老邪亦不遑多让。而其作风品性，更为难能可贵。柯老邪行事，坚毅果决，挥毫洒脱。虽无黄老邪之怪诞乖张，却存魏晋之遗风，携汉唐之豪侠，具田园之逸气。在斯大林的高压治下，他醉心学术，潜心教育，不问党政。而当德军兵临城下，存亡危机之时，他毅然转入弹道学及火炮自动控制的统计学研究，使万千苏联军民受益良多。在对外交流封闭的岁月里，他与众弟子啸聚东方苏俄，鼎足美欧学派，基础研究带来的工业腾飞让西方不敢小觑，世人为之动容。而当他的著述最终为西方所了解之后，众学派纷纷为之震惊。1963 年在第比利斯召开的概率统计会议上，来自美国的统计学家雅各布·沃尔夫维茨(Jacob Wolfowitz)甚至发出这样的疑问：“我来苏联的一个特别的目的是确定柯尔莫哥洛夫到底是一个人，还是一个研究机构。”

柯老邪之成就，实难备述，而在湍流上的贡献，也的确只算得上冰山一隅。如果我们只谈湍流，未免显得格局狭小，且不妨从柯老邪的少年轶事说起吧。

1. 声名鹊起

柯老邪 1903 年出生于莫斯科东南的小镇坦波夫。尽管他的数学天赋从童年时便显露无遗，但他却一直对俄国历史颇为着迷。自 1920 年入莫斯科大学以来，他除了研习数学，还积极参与到历史学教授巴克卢辛·维拉蒂米洛维奇(Bakhrushin Vladimirovich)所组织的历史学研讨会当中。很快，柯老邪便完成了人生中第一篇历史学论文，并将其交给了巴克卢辛。此文以“15 世纪诺夫哥罗德地区的财产管理(The landholding in the Novgorod in the 15th century)”为题，开创性地将数学统计的方法引入到了历史学研究中。巴克卢辛读后连连称奇，但从其历史学究的角度，他说出了如下论断：

“你为你的论文提供了一种证明，在你所研究的数学上这也许足够了，但我们历史学家则需要至少十种证明。(You have supplied one proof of your thesis, and in the mathematics that you study this would perhaps suffice, but we historians prefer to have at least ten proofs.)”

柯老邪少年意气，岂容他人置喙。正如他自己所说，“我从此决定进入科学领域，一个证明足以得到最终结论。(I have decided to go into science, in which for a final conclusion one proof is sufficient.)” 历史学界或许因此失去了一位天才学者，但数学界却得到了这位震古烁今的全才大师。

在柯老邪之后成就斐然的人生中，他数次对自己未能在历史学上有所建树深表遗憾，但事实却并非如此。在他辞世一年之后，俄国著名历史学家瓦伦丁·亚宁(Valentin Yanin)从柯老邪的手稿中发掘出了这篇关于俄国中世纪历史的遗世之作。直至此时，这篇将统计方法应用于这一历史领域的开先河之作才得到历史学界的重视。亚宁教授在评述中写道：“作为其研究方法的基础，作者提出了概率理论的应用，这一方法从未被运用到诺夫哥罗德地区财产注册的研究上，而且直至今日也未被广泛采纳。历史学界的这一遗憾正是源于学者们对柯尔莫哥洛夫七十年前这篇论文的忽视。(As a basis for the method, the author put forward the theory of probability, which had not been applied to Novgorod land-registers before and is unfortunately not so applied now due to the ignorance of researchers on the subject of Kolmogorov's work of almost seventy years ago.)” 在亚宁教授的主持下，柯老邪的这篇文章也在三年后正式发表，终成经典。

在此等神迹面前我们只能望洋兴叹。皓月之光，岂萤火所能争辉？

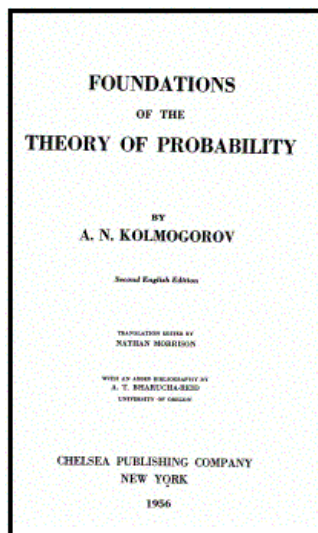
让我们把时间轴退回到 1929 年。时光如梭，柯老邪在莫斯科大学已历十年寒暑。他师从数学分析学大师尼古拉·卢津(Nikolai Luzin)，尽得其所传。他根基深厚又兴趣广博，循序渐进又触类旁通。值此艺成毕业之际，柯老邪任督二脉豁然贯通，已隐隐显出一代宗师之风范。

此时的苏联，尽管斯大林的独裁统治已初见端倪，但与西欧的关系还未向后来那般剑拔弩张。柯老邪也得以在 1930 年访学德法。在哥廷根与巴黎高师的校园里，柯老邪与理查德·库伦(Richard Courant)研讨极限理论，与赫尔曼·外尔(Hermann Weyl)论道构造逻辑，与亨利·勒贝格(Henri Lebesgue)切磋积分分析。一年之间，柯老邪功力日盛，学贯东西，已

渐入无往不利之境界。闲暇时，他徜徉于巴黎塞纳河畔，流连于阿尔卑斯山间，仰望浮云，俯视流水，在阳光的沐浴下继续着对数学理论思考。

量子论说：世间万物是概率性的。柯老邪与自然的亲密接触或许也促成了他对于概率理论思考。从中世纪开始，以欧洲职业赌徒为契机，概率论的研究逐渐开始被数学界所关注。几个世纪以来，包括高斯，拉普拉斯，伯努利等数位大师为其添枝加叶，陆续注入着新鲜的血液。然而，由于概率论尚未形成一个理论上的公理体系，这些零星的火种犹如无本之木；贝朗特悖论横行一时，概率论也始终徘徊在主流数学殿堂之外。

1931年，柯老邪返回苏联，受聘莫斯科大学教授。在之后的两年里，他对概率的理解日深，终于悟出以测度为基础的严格公理体系。他以“概率论基础 (Foundations of the Theory of Probability)”为题著书立说，一经问世便得到天下公认，为现代概率论的发展打下了坚实的基础。



“概率论基础”1956年英译版

柯老邪之于概率论，正如牛顿之于经典力学，三丰之于太极神功，承先启后，继往开来。

在柯老邪的书中，他对一个随机过程 $x(t)$ 进行了严格定义和系统研究，并将其推广到 t 为多维变量时的随机场情况。数学理论既已完备，为其寻找物理应用便成为了柯老邪新的目标。如果说对于随机过程的应用带来了柯老邪在布朗运动上的深刻理解，那么湍流场则是随机场理论练兵的不二之选，而这也正是柯老邪进军湍流领域的初衷。

2. 未解之谜

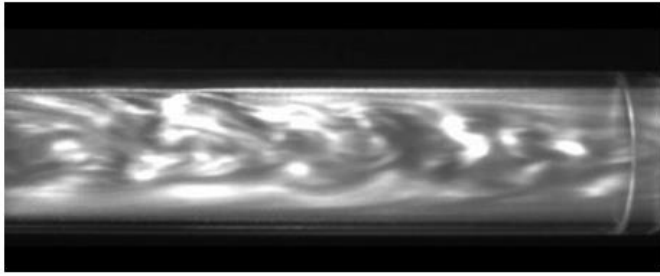
湍者，急且乱也。

自从奥斯鲍恩·雷诺(Osborne Reynolds)于 1883 年在管流实验中观察到湍流（请参见索末菲学派那些事儿上部）以来，众多数学物理大师开始试图从理论上理解这种现象背后的规律。然而，湍流犹如物理界的一座坚城壁垒，任众学派船坚炮利，亦无法动其根基。洛伦兹，索末菲折戟沉沙，海森堡，冯诺依曼举步维艰。直至今日，湍流的理论体系仍尚未完成，正如美国著名物理学家理查德·费曼(Richard Feynman)所说：湍流，是“经典物理最后的未解之谜(the most important unsolved problem of classical physics)”。

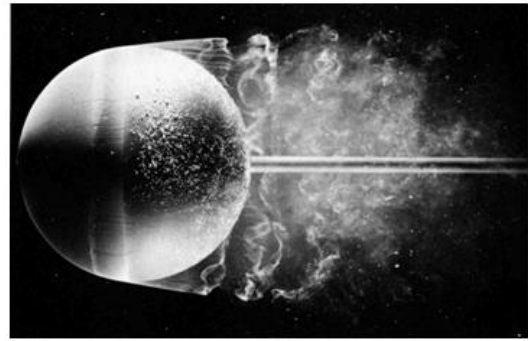


理查德·费曼 (1918-1988)

然而，雷诺的实验结果是如此的无可辩驳，湍流现象也在自然界中随处可见。或管道流动，或物体绕流，或凭虚御风，或潮起浪涌，或星沉轨动，湍流无处不在地雕刻着自己的印记。在这些错综复杂，涡旋丛生的流场中，流体质点的运动犹如鬼魅，它们无迹可循，不可预测，无法重复，牵一发而动全身。在这些看似杂乱无章的运动的背后，是否存在一些普遍适用的物理规律？这正是湍流研究的核心问题。



管道流动



物体绕流



凭虚御风



潮起浪涌



星沉轨动

湍流问题的本质是物理的，也是数学的。众学派始终相信，湍流的解答可以从流体力学基本方程纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes Equation)中找到。如果一位数学天才可以找到此方程在任意边界条件下的解析解，湍流问题或许会迎刃而解。然而时至今日，纳维-斯托克斯方程解析解的相关问题仍然作为克雷数学研究所的七大千禧年问题之一悬而未决。

此路不通，众学派只能另觅他径。由于流场中单个质点运动的不确定性，所谓的普适物理规律只能从概率统计学意义上来寻找。柯老邪显然也很早便认识到了这一点。在他 1985 年出版的专著“数学与力学(Mathematics and Mechanics)”中，柯老邪回忆道：“我在三十年代后期兴趣转入了液体与气体的湍流研究。从研究伊始我便意识到此领域的主要数学工具是有多个变量的随机函数（即随机场）理论，而这在当时也刚刚被建立起来。(I took an interest in the study of turbulent flows of liquids and gases in the late thirties. It was clear to me from the very beginning that the main mathematical instrument in this study must be the theory of random functions of several variables (random fields) which had only then originated.)”

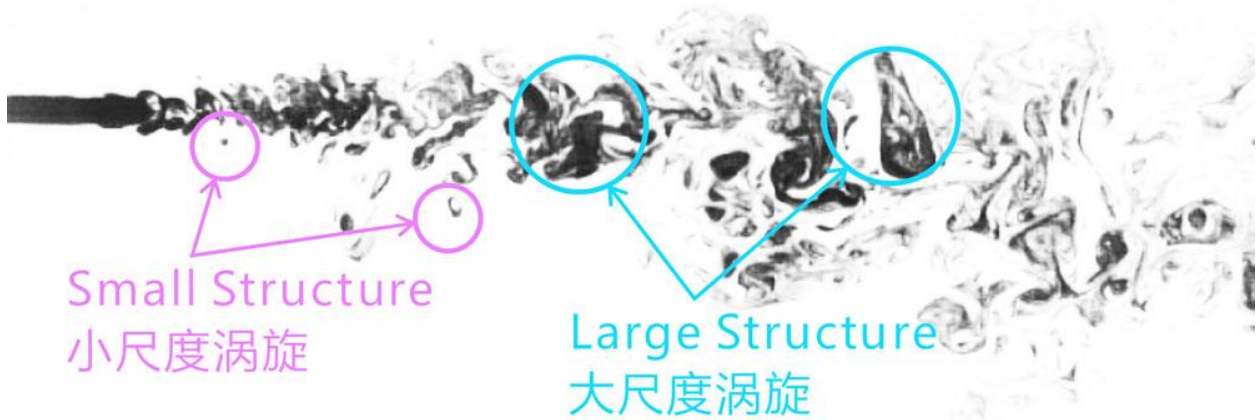
随机场，这正是概率理论的用武之地。而此时的柯老邪，在概率论上的造诣已独步天下，不做第二人想。

3. 大厦之基

如果说 1905 年是爱因斯坦奇迹年，那么 1941 年则称得上湍流史上的柯老邪奇迹年。这一年，柯老邪连续发表三篇论文，一举奠定了其流体力学界一代宗师的地位。这三篇文章对于湍流物理规律的阐述，江湖获封 K41 理论。它们是柯老邪与其弟子数年之功的总结，也是湍流研究史上人类所取得的最辉煌的成就。

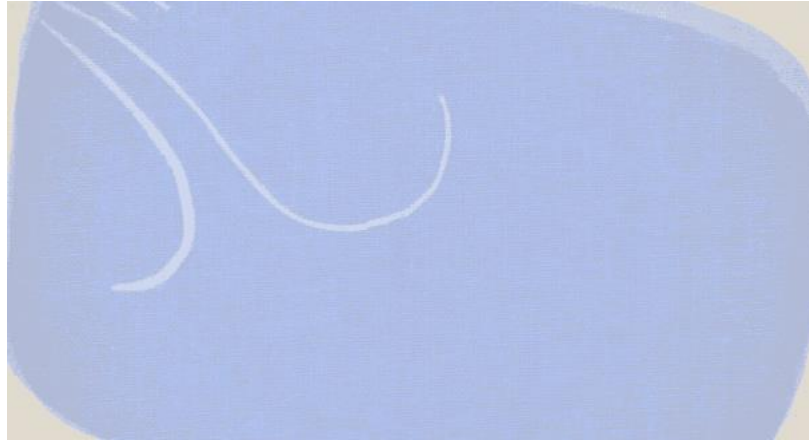
在具体介绍 K41 理论之前，我们需要先引入“尺度”这一概念。尺度者，大小之衡量也。“鲲之大，不知其几千里也”，鲲的空间尺度为几千里。“朝菌不知晦朔，螻蛄不知春秋”，朝菌与螻蛄的时间尺度，分别小于一月和一年。

而湍流，是一个具有多尺度结构的系统。从流场中涡旋的角度而论，湍流可看做是很多不同尺度涡结构的相互作用。以大气湍流为例，其涡结构尺度范围可从几毫米延伸至几千千米，大涡可通天级，小涡仅在毫厘。

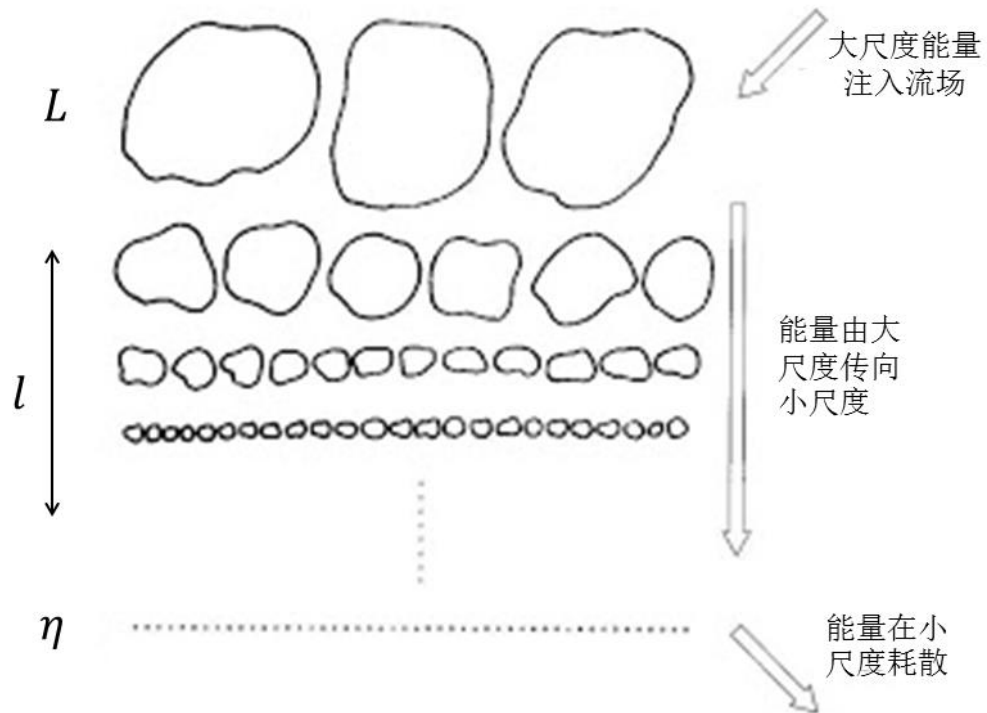


湍流射流中的涡旋结构

K41 理论认为，无论一个湍流系统如何复杂，其涡旋结构都有着相似性，即涡的动能总是由外力作用施加给流场，并注入最大尺度（假设为 L ）的涡结构。然后大尺度涡结构逐次瓦解并产生小型涡旋，同时也将动能由大尺度逐级传向小尺度结构，并依此类推。但此过程并不会无限进行下去，当涡结构尺度足够小（假设为 η ）时，流体粘性将占据主导地位，动能转化为内能在该尺度上耗散掉，而不会继续传向更小尺度的涡结构。这个过程，被称为能级串过程。



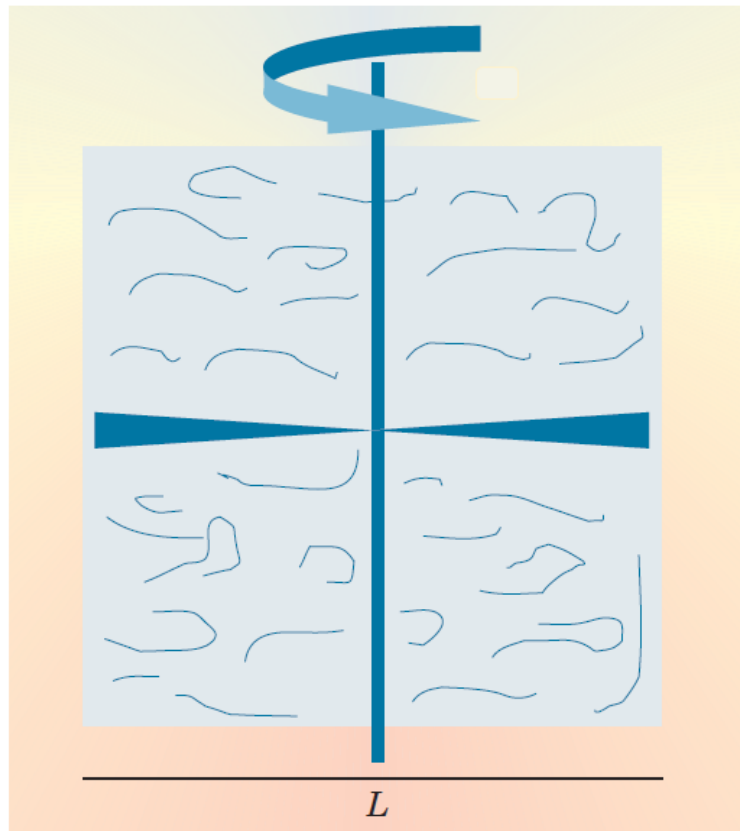
大涡生小涡



K41 之能级串过程

我们试举一例将其具体化。假设有一个长度尺度为 L 的水桶，我们手持搅拌器在同样的尺度 L 上对桶里的水进行搅拌。不难想象，桶中会出现尺度为 L 的最大涡旋结构。随着时间的推移，桶中的涡结构尺度层次会变得更加丰富，不断有更小的涡产生。此时，系统将达到一种动态能量守恒：动能由搅拌器在大尺度 L 上施加给系统，系统中的动能由尺度为 L 的大涡一级级传向小涡结构，最终由于粘性耗散在最小尺度的涡结构里。整个系统力作而

兴，力息而竭。如果我们撤去搅拌器的外力，桶中的涡旋结构将会慢慢衰减，直至被粘性消耗殆尽。



(图片来自 Falkovich, Sreenivasan 2006, physics today)

正所谓，大涡生小涡，小涡生小小涡，而子子孙孙有穷尽也。

如果柯老邪的发现仅仅是这样一个有着些许诗意的湍流物理模型，K41 理论的江湖地位难免会大打折扣。事实上，K41 理论之所以成为湍流界的至尊，是由于其在物理模型之上引入了对于湍流定量描述。而数学，是描述自然规律唯一有效的语言。

由于人类在纳维-斯托克斯方程面前的无力，引入数学描述并非易事。为此，柯老邪以其深刻的物理直觉引入了一个大胆的假设，将整个问题抽丝剥茧，直至其本质完全暴露，再辅以前等数学的量纲分析便得到了描述湍流场涡结构动能的最有效的一个公式：

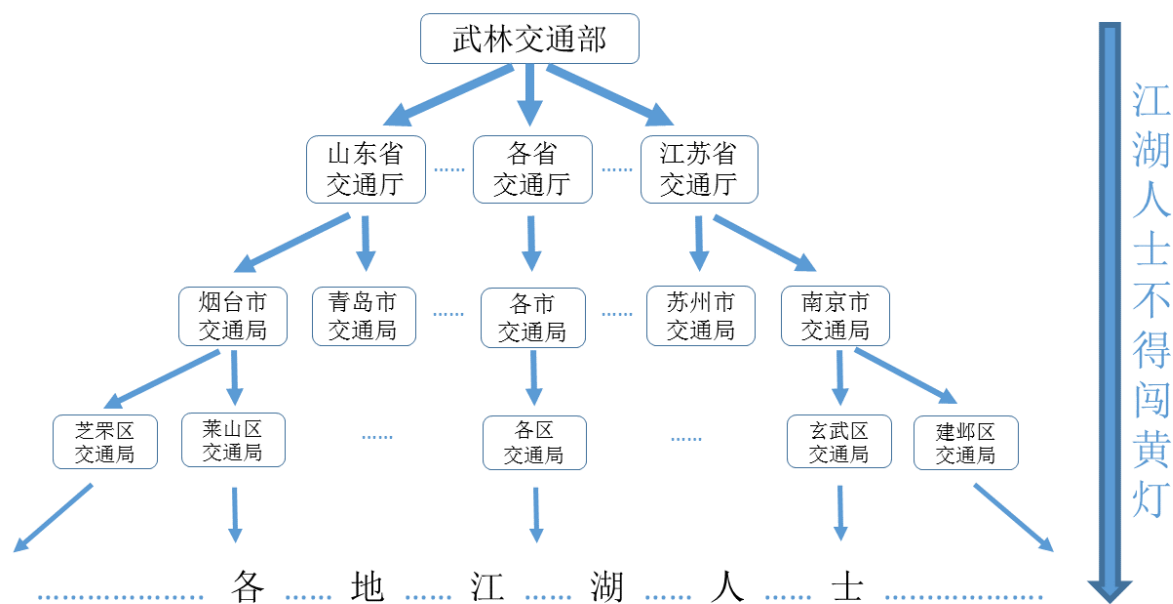
$$S_2(l) = C\epsilon^{2/3}l^{2/3}.$$

式中， l 为湍流场中两点间距离， ϵ 为由大尺度向小尺度的动能传递率，亦等同于小尺度动能耗散率， C 为无量纲的柯尔莫哥洛夫常数。而 $S_2(l)$ 为二阶结构函数，其定义为 $S_2(l) = \langle \delta u(l)^2 \rangle$ ，即湍流场中相距为 l 两点间速度差 $\delta u(l)$ 平方的（空间或时间）平均值。此结构函数乃柯老邪独创之统计量，它度量了尺度小于等于 l 的所有涡结构之动能。

此公式为 K41 理论的最核心部分，被称为“柯老邪之 $2/3$ 标度律”。正如许多伟大的物理公式一样，柯老邪的 $2/3$ 律形式优美，结构简单。而在这令人为之倾倒的美感背后，却隐藏着非凡的物理含义。原来，湍流场中不同尺度 l 上的涡结构动能并非任意分布，而是要服从 $l^{2/3}$ 的幂函数形式。因此，涡动能从大尺度到小尺度以幂函数形式衰减。而由于柯老邪引入的假设， $2/3$ 律只在一定尺度范围 $\eta \ll l \ll L$ 内成立。在此范围内，大尺度 L 的外力作用和小尺度 η 的粘性耗散均无影响，每个涡结构仅是一个动能传递的节点，其所见只是动能从大尺度传来，通过自己向小尺度传出。

所谓实践是检验真理的唯一标准，在柯老邪如此天马行空的物理假设下，K41 理论的正确与否似乎只能通过物理实验来检验。这的确成为了 K41 理论问世之后各学派争相实验的主题。这些实验尺度大小有别，流动形态各异，而万变中的不变却是所测得的湍流 $2/3$ 标度律 - 柯老邪公式中 $2/3$ 这个数字被无数实验所证实。其中最惊人的当属卡尔·吉布森 (Carl Gibson) 教授 1991 年所测得的星系湍流，其结构函数在近十个数量级的尺度范围内与湍流标度律相符。柯老邪一念之力，竟至于斯。

为了更清晰地展示柯老邪鬼斧神工般的 K41 理论，我们试以“武林交通部”系统（如下图）与湍流场做一类比。某日，武林交通部高层人士通过了“二十三省江湖人士不得闯黄灯”的江湖禁令，并将其下达至省交通厅；各省交通厅将此禁令分解为“各市江湖人士不得闯黄灯”并继续向下级传达；依此类推，这条禁令又经过市，区两级交通局分解并最终传达至各地江湖人士。在此例中，武林交通部是系统中最大尺度 L 的涡结构，省市区各级交通单位是稍小尺度的涡结构，而各地江湖人士是最小尺度 η 的涡结构。江湖禁令的传递则类比湍流场中的动能传递。



为加强宣传力度，武林交通部三令五申，不厌其烦地将此江湖禁令传达给下级机构。而随着各级交通部门的传递，这条江湖禁令也三番五次的传到各地江湖人士耳中。江湖人士们不胜其扰，只得听而不闻，任消息随风消散。在这段描述中，武林交通部的三令五申相当于大尺度涡为湍流系统提供的源源不断的动能，而消息的随风消散则相当于小尺度涡动能的粘性耗散。

在任意交通部门中，其所接受和传出的信息量相等。例如，山东省交通局所接受的信息为“山东省江湖人士不得闯黄灯”，而其分解后传出的信息为“烟台市江湖人士不得闯黄灯”，“青岛市江湖人士不得闯黄灯”，等等。此两者均作用于山东省每一名江湖人士，因此其信息量相等。而对于整个交通系统而言，每一级之间所传递的信息均作用于所有江湖人士，因而各级间传递的信息总量亦相同。这时的信息传递效率，即单位时间内各级间的信息传递量，则对应于柯老邪公式中的 ϵ 。如果各级间 ϵ 不同，会造成整个系统效率低下，信息阻滞。

为保政令畅通，省市区三级交通部门积极进行机构整改，剔除冥顽不灵者，招纳顺应时势者，最终形成了交通部门的最优机构配置。在这个最优配置中，各级交通部门只知自己有上级下级，并将上一级下达的禁令如实传递给下一级，而并不知道自已位于整个系统中的哪一级。在这个各司其职的系统中，禁令的传递效率 ϵ 在每级达到一致，毫无阻滞的从武林交通部直达每个江湖人士。此时各级机构的最优配置正对应着柯老邪描述涡结构动能在不同尺度上分布的 $2/3$ 律，即 $S_2 \sim l^{2/3}$ 。

此例中的描述，或有牵强之处，但以社会系统印证柯老邪的 K41 理论，却也无伤大雅。

而令人咋舌的是，在 K41 理论问世之前的一些艺术作品中，也有着 $2/3$ 律的影子。其中最著名的当属 1889 年文森特·梵高(Vincent Van Gogh)在其精神错乱期间留下的旷世名作“星夜(The Starry Night)”。画中的光影星云结构被认为是湍流涡结构很好的诠释。最近的研究则有着更为惊人的发现：如果将画中每一像素点的亮度看作是湍流场中速度大小的话，由此画所计算出的结构函数与柯老邪的 $2/3$ 律有着近乎完美的相符。这一惊人的巧合，究竟仅是过分解读，还是意味着人类精神失控时思维之湍流与自然界之湍流有着内在的联系，笔者也难以断言。这个谜题或许要留待后世来解开了。



“星夜”，文森特·梵高，1889

如果说柯老邪的概率论是集大成之作，其 $K41$ 理论则可称得上湍流结构理论之滥觞。涓涓细流，终成巨澜滔滔。在后世的湍流研究中，对于 $K41$ 理论应用所取得的硕果璀璨绚丽，许多看似无从下手的问题由于 $K41$ 理论的引入迎刃而解。柯老邪的莫斯科学派也从 1946 年开始组织两周一次的研讨会，精研 $K41$ 理论在具体湍流体系中的运用。从这里走出的柯老邪在湍流界的四大弟子，亚历山大·奥布霍夫(Alexander Obukhov)，米哈伊尔·米林斯奇科夫(Mikhail Millionshchikov)，安德雷·莫宁(Andrei Monin)与阿奇瓦·亚格洛姆(Akiva Yaglom)将于日后在各自的领域内独领风骚。其中的奥布霍夫与莫宁分别接管和领导了苏联在大气湍流与海洋湍流上的研究。欣喜之余，柯老邪豪言道：“我的一名弟子统御地球大气，而另一名弟子管辖四方海域。(One of my students rules the Earth atmosphere, another – the oceans.)”



亚历山大·奥布霍夫(1918-1989)



米哈伊尔·米林斯奇科夫(1913-1973)



安德雷·莫宁 (1921-2007)



阿奇瓦·亚格洛姆(1921-2007)

天下武功纷繁庞杂，而以内御外方为修行之正途。K41 理论正如湍流界的九阴真经，它从内在上试探着湍流的根基，撩拨着湍流的心弦。如果说时至今日湍流结构研究已渐成一座大厦，那么 K41 理论正是这座大厦的地基。尽管它之后还将经历一番波折，但它必定永载史册，千年不朽。

4. 前世今生

在科学发展史上，不乏有这样一些理论，它们的光芒绚丽夺目，如一盏明灯，驱散了当世的黑暗，点亮了后世的道路。然而，当你回首来时路，却发现理论的创立过程似乎平凡至极。它们如同萧峰随意挥洒的太祖长拳，杨过大巧似拙的玄铁重剑，看似平淡无奇却又威力无穷。

柯老邪的 K41 理论也正是如此。他以一个物理假设为起点，以能级串模型为基础，将问题层层肢解，直击湍流的要害。整个过程一气呵成，既无纷扰繁复的数学推导，亦无艰深晦涩的数学证明。是何原因，让一个严谨的数学家敢于做出如此大胆的物理设想呢？

古人云：格物致知。柯老邪对于湍流物理模型的推测首先要归功于他对实验数据分析的数年之功。在专著“数学与力学”中，他这样回忆自己初涉湍流领域时的想法：“我很快便意识到想要建立一套严格的纯数学理论是不可能的。因此根据实验数据的分析来建立一些假想是湍流研究的必经之路。(it soon became clear to me that there was no chance to develop a closed purely mathematical theory. For lack of such a theory it was necessary to use some hypotheses based on the results of treatment of experimental data.)”柯老邪虽然自己不做实验，却对于收集和分析实验数据乐此不疲。在 K41 理论建立的三十年后，柯老邪还以暮年之身远航全球，为收集海洋湍流数据不懈努力着。

其次，柯老邪深厚的数学理论功底也不可或缺。今世的大多数流体力学教科书，提及 K41 理论必称其为量纲分析之典范，如此或可使学生对于 $2/3$ 律的推导过程有一个直观的了解，却往往忽视了柯老邪基于纳维-斯托克斯方程对于湍流场分析的理论之功。提及这一时期莫斯科学派对湍流的理论分析，有两项工作不得不谈。

其一为奥布科夫于 1941 同年所发表的关于湍流能量谱的文章。基于柯老邪前一年对概率论中随机过程能量谱的阐述，奥布科夫从纳维-斯托克斯方程出发建立了湍流能量谱的半经验式方程。此方程描述了这样的物理过程：湍流能量在某一尺度上随时间的变化与不同尺度涡结构相互作用以及小尺度粘性耗散有关。通过求解此方程，奥布科夫得到了与 $2/3$ 标度律所等价的湍流能量谱表述： $E(k) \sim k^{-5/3}$ (k 为波数，即尺度的倒数)。这两篇文章于 1941 年同时发表。或许由于柯老邪的方法更为简洁明晰且适用度更为广泛，世人对其更为青睐，因而忽视了奥布科夫的贡献。但柯老邪本人却对奥布科夫的工作十分尊敬，言必称 K41 理论是他与奥布科夫共同所创，是以应称之为 KO41 理论更为妥帖。

其二为米林斯奇科夫于 1941 年所得到的对于湍流脉动速度二元关联函数的控制方程。这项工作推导了脉动速度关联函数的逐级表达方式，并通过四元函数与二元函数的联系使控制方程闭合。其方法可视为后世计算机湍流模拟的鼻祖之一，功莫大焉。

而在同时代的中国，一位物理学家于 1940 年在“中国物理学报”上发表了题为“论雷诺求似应力的方法的推广和湍流的性质”的文章，其方法与米林斯奇科夫有着异曲同工之妙。此人就是周培源先生，这也正是他被尊为“湍流模拟之父”的原因。



周培源 (1902-1993)

一招平淡无奇的量纲分析背后竟然蕴涵着如此深厚的理论与实验之功。所谓重剑无锋，大巧不工，剑招的威力并非在于剑锋，而在于用剑之人的修为。唯有修为至深之人，方能化繁为简，以拙胜巧。

更为有趣的是，据柯老邪弟子亚格洛姆回忆，米林斯奇科夫并非随机场领域的专家。亚格洛姆因此推断 1941 年关于湍流脉动速度关联函数的文章一定是柯老邪亲力亲为的结果。米林斯奇科夫同时期的另一名弟子谢尔盖·福明(Sergei Fomin)则证实了亚格洛姆的这一推测。无独有偶，类似的事情也发生在亚格洛姆本人身上。1956 年，柯老邪在一篇有关信息论的文章中宣称其引入的某方程乃亚格洛姆之首创。而亚格洛姆本人却对此毫不知情，直至看到柯老邪的文章后才意识到这个方程的存在。当柯老邪被问及此事时，他含糊地回答说：自己的想法是在跟亚格洛姆某次谈话之后产生的，因此这个方程应该归功于亚格洛姆。

诸如此类的莫名之喜在柯老邪的弟子中比比皆是。而对于柯老邪，或许其真正伟大的力量来源于心底的无私。

呜呼哀哉，纵观当今天下，虚誉欺人而利欲熏心者有之，不学无术而摇唇鼓舌者有之，百无一能而大言不惭者有之，粗鄙龌龊而畏强凌弱者有之。江湖之上，投器使毒者众多，内修外敛者罕有，实可叹大师凋零，人心不古也。

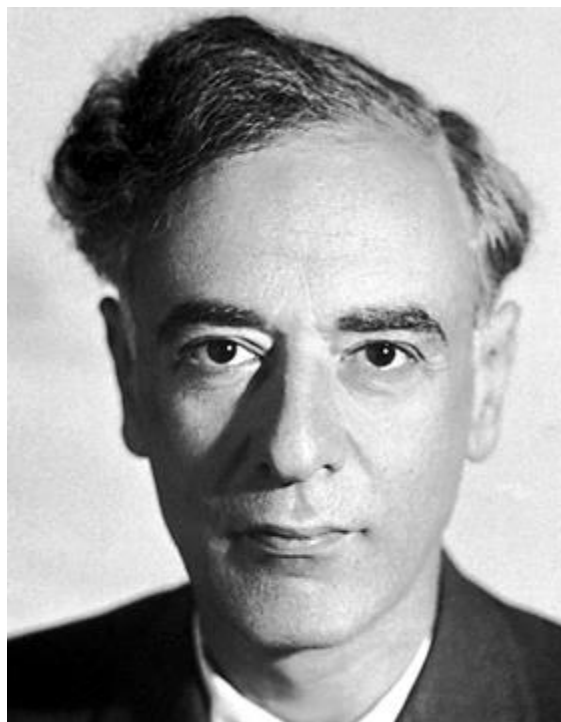
5. 美玉微瑕

如果从一个很大的时间尺度上看历史，似乎一切都按部就班，循规蹈矩。而如果身处某一时代的小尺度中，却很难不被时代的任何异动所惊扰，仿佛一切都是这个时代跟人类开的一个个玩笑。物理学的发展亦是如此，在山重水复中柳暗花明，而在一片坦途上却又枝节横生。

我们看到，在湍流这片混沌未开的乱世江湖中，柯老邪凭借一招量纲分析独创 K41 理论，剑携万钧之势，隐隐有包举宇内，席卷六合，并吞八荒之意。天下学派云集响应，似乎一统江湖即日可期。在如此大好形势之下，谁又能料想，前路依然荆棘密布。而这一切困难险阻，都来自于 K41 理论创立之初的一点隐忧。

1942 年苏联科学院的一次研讨会上，柯老邪进行了一次 K41 理论的专题报告。在到场的听众中，有一位显得卓尔不群。他身材瘦削，已显灰白的头发蓬松凌乱，然而双目如炬，似能洞悉一切。

此人名为列夫·朗道(Lev Landau)，乃当世苏联最杰出的理论物理学家。以修为之全面而论，朗道在物理学上的造诣或许并不输于柯老邪在数学上的广博。



列夫·朗道 (1908-1968)

两位绝世高手之间自是不消多言，柯老邪寥寥数语之间朗道便已尽得其精髓。饶是朗道平生为人狂傲，素来言辞尖锐，也不由得暗自称赞 K41 理论之精妙。他评论道：“柯尔莫哥

洛夫是第一个正确理解了湍流小尺度结构的人。(Kolmogorov was the first to provide a correct understanding of the local structure of turbulent flow.)”

会后，K41 理论在朗道脑海中久久挥之不去。他将其与自己平生所学一一印证，自觉妙用无穷。假以时日，以此为基础解决湍流问题也未必不能实现。

翌年，朗道推导出有外流体所包裹的层流射流的理论解，并开始考虑将 K41 理论引入到湍流射流的研究中。然而这一次，他却似乎发现了一些不妥之处。

如果将射流轴心视为湍流，外流体部分视为层流，那么两部分之间必然有一块湍流与层流交替存在的区域。由于动能耗散率 ϵ 与湍流强度相关，在此区域中， ϵ 必然不会像 K41 理论中所描述的随时间（和空间）不变，而是一定会随时间（和空间）有所起伏（在层流区为零，在湍流区为正值）。此时，柯老邪的 2/3 律公式该如何运用呢？如果将公式中的 ϵ 由瞬时值改为在时间上的平均值 $\langle\epsilon\rangle$ 的话，似乎也并无不妥……

且慢！此处确有不妥！

朗道在电光火石之间的顿悟从根本上粉碎了 K41 理论作为湍流普适理论的可能性。

在 1944 年出版的由朗道及其学生撰写的“理论物理教程(Course of Theoretical Physics)”第六卷“流体力学(Fluid Mechanics)”中，朗道将其想法加以总结并留下了这样一段耐人寻味的文字：

“很多学者们或许认为得到一个普适于任何湍流的公式从原则上讲是可能的，这个公式可以描述小于尺度 L 的结构函数 $S_2 = \langle\delta u(l)^2\rangle$ 。然而，由于如下论证，这类公式并不可能存在： $\delta u(l)^2$ 的瞬时值或许可以普适性的表述为动能耗散率 ϵ 瞬时值的函数。可是，将以上表述进行时间平均后会依赖于 ϵ 在大时间尺度（对应于大涡结构）上的变化，而这个变化对于不同的流动是不一样的。因此，时间平均的结果不可能是普适性的。(It might be thought that the possibility exists in principle of obtaining a universal formula, applicable to any turbulent flow, which should give $\langle\delta u(l)^2\rangle$ for all distances l small compared with L . In fact, however, there can be no such formula, as follows from the following argument. The instantaneous value of $\delta u(l)^2$ might in principle be expressed in a universal way via the energy dissipation ϵ at that very moment. However, averaging these expressions is dependent on the variation of ϵ over times of large-scale motions (scale L), and this variation is different for different specific flows. Therefore, the result of the averaging cannot be universal.)”

让我们为朗道这招绝妙的破剑式静默一分钟。

朗道的核心观点是这样的：由于 ϵ 随时间变化，因此我们只能寻找时均意义上的普适公式。即使我们假设 $\delta u(l)^2 = C\epsilon^{2/3}l^{2/3}$ 的 2/3 律在每一瞬时是普适性的，但由于 $\delta u(l)^2$ 与 ϵ 的非线性关系，将瞬时公式进行时间平均后并无法表述成 $\langle\delta u(l)^2\rangle = C\langle\epsilon\rangle^{2/3}l^{2/3}$ ，而将会依赖于 ϵ 随时间的变化。由于 ϵ 的变化对于不同流动是不同的，因此时均的表述不可能是普适的。

例如， $27^{2/3} = 9$ ， $8^{2/3} = 4$ ，但 $((27 + 8)/2)^{2/3} = 6.7$ 而不等于 4 和 9 的平均值。

我们再次回到“武林交通部”的例子，将朗道的论证与之做一类比。

在“二十三省江湖人士不得闯黄灯”的禁令通达天下之后的一年内，武林交通部高层三易其令。首先，武林交通部颁布了“鲁苏湘川四省人士可以闯黄灯”的政令，三分之一年后又出台了“辽吉浙晋皖五省人士亦可以闯黄灯”的政令，最后的三分之一年干脆决定“其余十四省人士也可以闯黄灯”。

此一年中，相应的省市级部门分别按需整改机构，以保证三条新政令在其分别的施政时间内畅通无阻并持续不断地传递给相应的江湖人士。这三条新政令的传递均只需要一部分省市级交通部门，相对于整个网络系统，它们的机构规模分别占据 $4/23$ 、 $5/23$ 和 $14/23$ 的比例。而且，三条政令的传递率也截然不同。对于规模较庞大的系统（如 $14/23$ 的部分），其传递率也较大，反之亦然。如果按照 $\delta u(l)^2 = C\epsilon^{2/3}l^{2/3}$ 将它们量化，传递率 ϵ 则应正比于其机构规模的 $3/2$ 次方，即 $(4/23)^{3/2} = 0.07$ ， $(5/23)^{3/2} = 0.10$ 和 $(14/23)^{2/3} = 0.47$ 。

年终总结大会上，武林交通部高层首先对过去一年的施政方针进行了总结。他们将三条政令的内容进行了平均，并声称：年中每一时段我们不断下达着允许 $(4/23+5/23+14/23)/3=33\%$ 江湖人士闯黄灯的号令。随后，各省市级交通部门也对他们传递上级方针的效果做出了总结。在对三部分传递率进行平均之后，他们声称：我们的平均信息传递率为 $(0.07+0.10+0.47)/3=0.21$ 。此时，问题来了， $(33\%)^{3/2} = 0.19$ ，而不等于 0.21 。K41 理论并不能用于平均结果。

一言以蔽之，武林交通部的朝令夕改使得各级交通部门疲于奔命，虽然在每一时刻都按照 K41 理论传递着信息，年终总结时却发现其平均效果并不符合 K41 理论的描述。

而究其原因，K41 理论对平均结果的失效是由于 δu^2 并非正比于 ϵ 。因此，即使两者瞬时值满足 K41 关系，其平均值却未必满足。

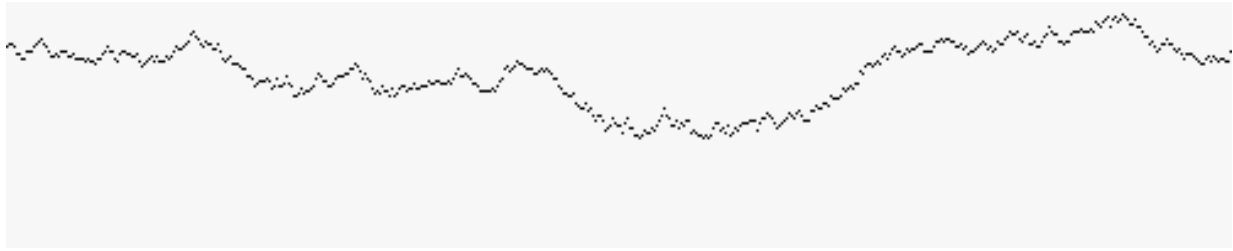
朗道的这一论证如 K41 理论本身一样，简洁明了却直击要害。它并不深究湍流更深层次的物理性质，而是剑走偏锋，以动能耗散率随时间波动的推测为基础，仅辅以初等数学的分析方法，便如釜底抽薪般地将 K41 理论的普适性瓦解于无形。

然而，这个有着瑕疵的 K41 理论所描述的 $2/3$ 律仍然被一次次实验所重复着。相对于尖酸刻薄的朗道，自然界仿佛更青睐挥毫洒脱的柯老邪。这又是为什么呢？

要回答这个问题，我们需要从柯老邪 $2/3$ 律背后的物理深意讲起。柯老邪当年以一招量纲分析，将二阶结构函数 $S_2(l)$ 表示为尺度 l 的幂函数，实际上暗示着湍流场的一个重要特性，即尺度不变性。

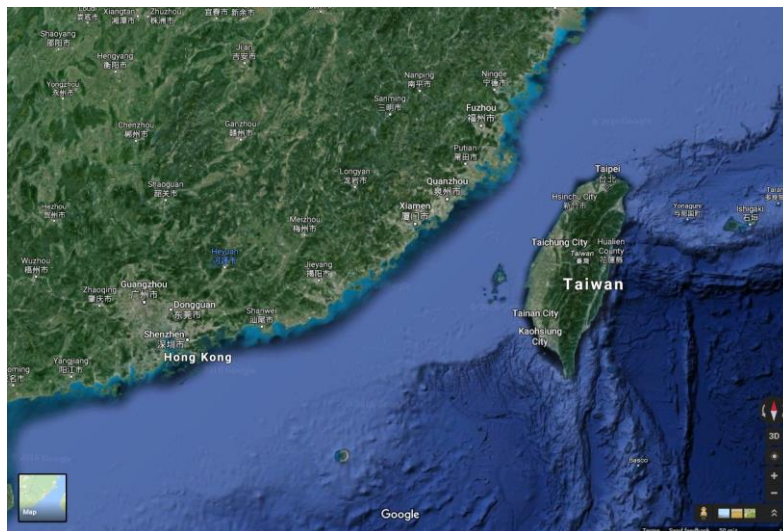
何为尺度不变性？假设我们有一个形如 $y = x^p$ 的幂函数。在区间 $(x, 2x)$ 内， y 从 x^p 变化至 $(2x)^p$ 。如果我们将区间尺度扩大 a 倍，变为 $(ax, 2ax)$ ，那么 y 则会从 $a^p x^p$ 变化至 $a^p (2x)^p$ 。

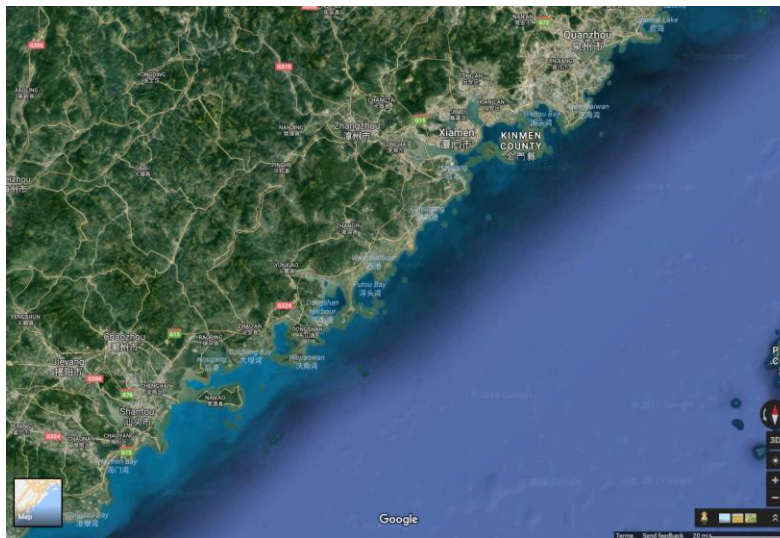
除了 a^p 这个因子外，后者中 y 的变化形式与前者相同，皆扩大了 2^p 倍。因此，观察者无论从哪个尺度上看这个函数，它都是相似的。



尺度不变性函数例子（动画来自维基百科）

我们再以中国南海海岸线试举一例。如果从下图所示的三个完全不同的尺度来观察海岸线，我们会发现它们的特征都是相似的。如果不借助地名标注，我们无法分辨自己身处哪一尺度。





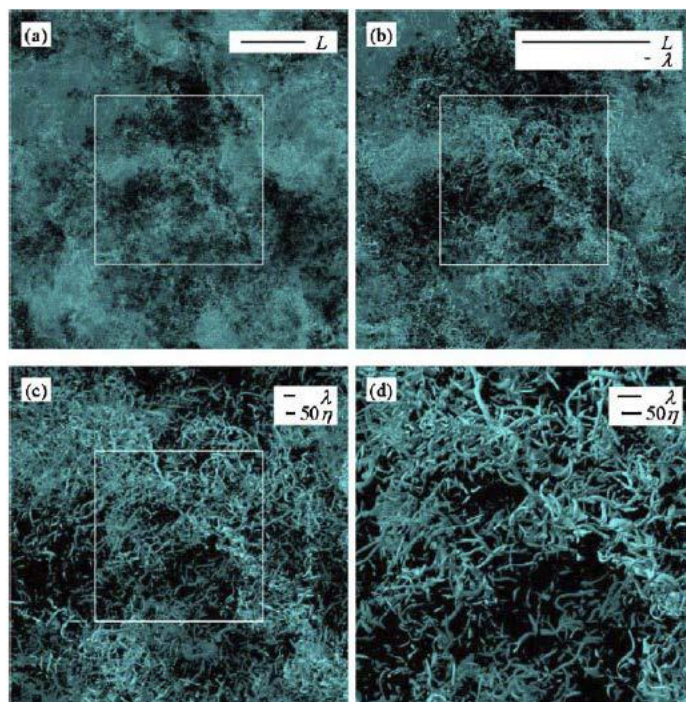
(图片来自豆瓣文章“继续分形的讨论”)

而柯老邪的 $2/3$ 律则意味着，湍流场也有着尺度不变性。在 $\eta \ll l \ll L$ 的范围内，无论从哪个尺度观察湍流场，其统计量都是相似的。这进而意味着，湍流场中所有的统计量都可以通过量纲分析表示为尺度 l 的幂函数形式。

这的确是柯老邪在 1941 年所推测的。他不仅将二阶结构函数 $S_2(l) = \langle \delta u(l)^2 \rangle$ 写为 l 的幂函数形式，更是通过量纲分析写出了任意 n 阶结构函数 $S_n(l) = \langle \delta u(l)^n \rangle$ 的通用标度律形式 $S_n(l) \sim l^{n/3}$ 。

后世的实验证明，尽管对于 n 较小的低阶统计数据，柯老邪的公式描述相对准确，但对于 n 较大时的高阶统计数据，朗道论证的威力就会显现出来，实验数据与柯老邪的公式差异明显。这个差异，在数学上被称为“标度奇异性”，它从根本上打破了尺度不变性这一 K41 理论的立身之所。

而追根溯源，这一切皆始于朗道所提出的耗散率 ϵ 随时间变化这一特性。各学派继而研究发现， ϵ 的变化在时间与空间上都普遍存在，而且不仅存在于朗道所说的大尺度，在小尺度上更有愈演愈烈之势。这一特性，世称湍流之“间歇性”，也成为了湍流的基本性质之一。



湍流涡结构在不同尺度空间分布不均的间歇性(Kaneda & Ishihara, 2006)

如何在间歇性存在的前提下建立描述湍流的定量普适物理模型，成为了当今湍流理论研究之重心。自 K41 理论与朗道论证以来，此问题已现百家争鸣之势，甚至柯老邪本人也于 1961 年试图修正 K41 理论将间歇性纳入体系之中。其他诸如拉格朗日方法，重整化群理论，分形几何学，混沌理论等等众派武学也纷纷现身江湖，一试身手。然而众说纷纭，莫衷一是，令世人广为信服的理论尚未出现，湍流研究也仍处于群雄纷争的探索之中。

K41 理论瑕疵既存，其一统江湖之势便无从谈起，但这丝毫没有动摇此理论在湍流史上的地位。它对于湍流动能的描述依然精准有效，其应用亦是绚丽多彩。而它的一点瑕疵则指引着后世的物理学家们继续探究着湍流的本质与奥秘。正如十九世纪末物理学大厦的两朵“乌云”引领了相对论与量子力学的革命，我们今天仍在等待着湍流界的“相对论”和“量子力学”的出现。

6. 衣钵传承

在湍流这个充满争议的物理领域中，似乎很难有人将数学上的精确解与之相联系。然而，这一点在下面这位主角出场后成为了可能。他以弱非线性为前提，为柯老邪之 K41 理论建立了完整的数学体系，并将其扩展至任意波系之中。

此人名为维拉蒂米尔·扎克哈洛夫(Vladimir Zakharov)。作为柯老邪湍流理论的衣钵传人，我们称他为扎小邪。



维拉蒂米尔·扎克哈洛夫（生于 1939 年）

扎小邪研究兴趣之广博深受柯老邪与朗道两派影响。在他所涉足的等离子体物理，流体力学，海洋学，地球物理，固体物理，光学，广义相对论等诸多领域中，许多基础方程式皆以他命名。他执掌朗道理论物理研究所，其学派弟子遍及天下，威名远播。他又兼修诗赋，其诗集英文译本“云之天堂(The Paradise for Clouds)”于 2009 年在英国出版后大获好评。

此等人物，实难将其与问题少年联系起来。而事实上，扎小邪之少年行事，已颇有柯老邪桀骜不驯之风范。他早年就读于莫斯科动力学院，却因打架被学校开除。幸得朗道弟子罗尔德·萨格蒂夫(Roald Sagdeev)慧眼识珠，将扎小邪收为门人。在物理学的新世界中，扎小邪将过去的问题抛之脑后，迎接他的将是一段璀璨多彩的奇幻旅程。

扎小邪随萨格蒂夫攻读博士期间，就发现声波系统似乎也有着柯老邪 K41 理论中的湍流性质，即声场能量从长波传向短波，其能量谱与波数呈幂函数关系（前文中奥布科夫所用的等价形式）。更为美妙的是，以弱非线性为前提，这一切都可以从声波动力学方程中严格推导出来。

扎小邪继而将他所悟出的理论体系用于水波研究中，并再获成功。水波能量谱不仅遵循幂函数关系，还有着更为奇妙的现象。能量不仅可以像 K41 理论描述的那样从长波传向短波，也可以从短波传向长波。这在随后也被物理实验及数值模拟所证实，被称为反向能级串过程。数学与物理相互印证，美妙如斯。

既为朗道之再传弟子，扎小邪这套理论体系也深深打上了朗道学派的烙印。而他精研柯老邪及其门生的理论著作，在湍流上的理论功底也非比寻常。因此，扎小邪有此成就，实乃其兼修两派绝学之功。如果我们将其理论体系加以总结，此特点亦可不言自明。对于任意一类波系的动力学方程，扎小邪的处理如下：

将动力学方程写为经典力学中的汉密尔顿形式 – 朗道学派之传统；

以弱非线性假设为前提，利用摄动理论剔除方程高阶非线性项 – 朗道学派之传统；

推导随机场方程，并通过多元关联函数与二元关联函数的联系将方程闭合 – 米林斯奇科夫（周培源）的方法；

建立动能方程(Kinetic Equation) – 奥布科夫的体系；

从动能方程中找到能量谱幂函数形式的稳定解 – 柯老邪 K41 理论之严格数学解，乃扎小邪之首创。

这个能量谱的理论解，被称为柯尔莫哥洛夫–扎克哈洛夫能量谱，而这整个体系，被称为弱湍流（或波湍流）体系。扎小邪也因对湍流理论的贡献获得了 2003 年的狄拉克奖章（理论物理学最高荣誉）。

我们看到，扎小邪以弱非线性假设为前提，忽略湍流间歇性的影响，为柯老邪的 K41 理论创立了严格的数学体系。弱湍流理论运用于扎小邪所涉足的物理领域，皆取得了非凡的成就。时至今日，柯尔莫哥洛夫–扎克哈洛夫能量谱已存在于等离子体物理，水波，磁流体，声学，光学等诸多领域，并渐渐自成一派武学，为江湖众派弟子所推崇。柯老邪当年潜心所创 K41 理论之幂函数形式能量谱，竟为如此多的自然现象所遵循，不得不感叹天道之雄奇庄伟也。

有九阴总纲为证。天之道，损有余而补不足，是故潮起浪涌，皆循其形，星辰轨动，尽依其理。流动百态，造化万物，不谋而能谱自同，勿约而级串斯契，此诚天机之博奥也。

此时，若我们再次回顾梵高之画作，人脑思维之湍流一说似乎也并非无稽之谈。如能建立人类思维的控制方程，以扎小邪之理论作为指导，得到思维湍流的 K41 理论也并非全无可能。当然，这一切都还只是纸上空谈，行之何其难也。

湍流本质的研究亦是如此。在以 K41 理论为基础的这篇武学巨著中，柯老邪，周培源，朗道，扎小邪等必然位列其中，永载史册。然而，这篇巨著尚未完结，K41 理论中的瑕疵仍是众派物理学家们的心结，弱湍流理论也带来了很多新的问题。江山代有才人出，这些湍流界遗留的问题定会有人解决，我们也期待着这部鸿篇巨制最终完成的一天。

7. 后记

1943年柯老邪曾这样说过：“二十年内没有人会知道我们国家究竟发生了什么。(In twenty years no one will know what actually happened in our country.)”在这段最为黑暗的岁月里，一个战火摧残，恐怖弥漫，封闭专制，人性压抑，饥寒交迫的国度却成为了数学与物理大师们的沃土。这片土地上的各个学派中，学者们对于自然科学的追寻源自心底对于真理的热爱。他们大多精于思考，勤于交流，对相互间的研究了如指掌（这或许也造成了苏联学者们不善于向外界讲述他们的成果）。对于外界所流传的苏联学者常以激进的方式解决学术争端的说法，我们必须认识到这样一点：在一个充斥着政治谎言的环境中，科学是这些学者们唯一的净土。

今天，我们的环境更加开明，人心更加宽容。在这个时代，是否还会有新的“柯老邪”出现呢？